

Mecklenburg-Vorpommern



Dieses Dokument kann strukturelle Abweichungen vom derzeit gültigen Abitur aufweisen. Dennoch können Inhalte und Kompetenzen dieser Aufgaben einen wertvollen Beitrag in der Prüfungsvorbereitung leisten.

Musterabitur aus dem Jahr 2021

Mathematik (CAS)

Grundkurs

Prüfungsteil B – komplexe Aufgaben

Hinweise für Schülerinnen und Schüler

Aufgabenwahl: Der Prüfungsteil B beinhaltet drei Pflichtaufgaben, dabei sind in der Aufgabe zur Analysis 35 Bewertungseinheiten erreichbar, in den Aufgaben zur Geometrie und zur Stochastik sind es jeweils 20.

Bearbeitungszeit: Allen Prüfungsteilnehmern steht eine Bearbeitungszeit von 225 Minuten zuzüglich 30 Minuten für die Aufgabenauswahl zur Verfügung.

Nach Abgabe des Prüfungsteils A nutzt der Prüfling den verbleibenden Zeitraum für die Bearbeitung dieses Prüfungsteils B.

Hilfsmittel: Für die Bearbeitung der Aufgaben des Teils B sind zugelassen:

- ein an der Schule eingeführtes Tafelwerk,
- ein an der Schule zugelassenes Computeralgebrasystem (CAS),
- Zeichengeräte,
- ein Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung.

Schülerinnen und Schüler, deren Muttersprache nicht die deutsche Sprache ist, können als zusätzliches Hilfsmittel ein zweisprachiges Wörterbuch in gedruckter Form verwenden. Näheres regelt die Schule.

Sonstiges: Die Lösungen sind in einer sprachlich korrekten, mathematisch exakten und äußerlich einwandfreien Form darzustellen. In der Niederschrift müssen die Lösungswege nachvollziehbar sein.

Maximal zwei Bewertungseinheiten können zusätzlich vergeben werden bei guter Notation und Darstellung sowie eleganten, kreativen und rationellen Lösungswegen.

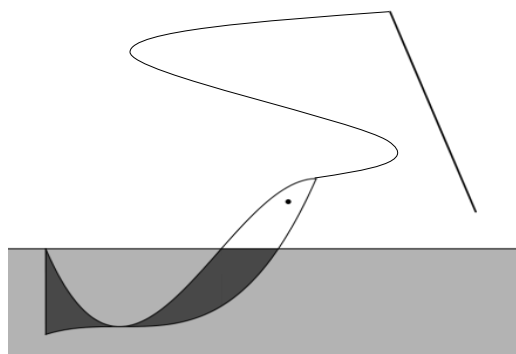
Maximal zwei Bewertungseinheiten können bei mehrfachen Formverstößen abgezogen werden.

Leerseite

1 Analysis

Die Abbildung zeigt das Logo eines Geschäfts für Anglerbedarf. Die obere Spitze der Schwanzflosse des Fische liegt auf der Wasseroberfläche; die Strecke zwischen oberer und unterer Spitze der Schwanzflosse steht senkrecht zur Wasseroberfläche.

Bei Verwendung eines geeigneten Koordinatensystems kann die untere



Begrenzungsline des Fische mithilfe der in \mathbb{R} definierten Funktion $u(x) = \frac{1}{8}x^3$, die obere

Begrenzungsline mithilfe der in \mathbb{R} definierten Funktion $v(x) = \frac{1}{4}x^2 \cdot (4 - x)$ beschrieben und

die Wasseroberfläche durch die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{5}{4}$ dargestellt werden.

- 1.1 Zeigen Sie, dass die Graphen von u und v nur die Punkte $P(0|0)$ und $Q\left(\frac{8}{3}|\frac{64}{27}\right)$ gemeinsam haben. 3 BE
- 1.2 Weisen Sie nach, dass der Punkt Q ein Extrempunkt des Graphen von v ist, und geben Sie die Art dieses Extrempunkts an. 3 BE
- 1.3 Entscheiden Sie für jede der Aussagen I und II, ob sie richtig oder falsch ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung jeweils rechnerisch. 4 BE
- I Für jeden Wert von $x \in \left]0; \frac{8}{3}\right[$ ist die Steigung des Graphen von v größer als die Steigung des Graphen von u .
- II Die Graphen von u und v berühren sich im Punkt P .
- 1.4 Berechnen Sie die Ausdehnung des Fische in x -Richtung und in y -Richtung. 5 BE
- 1.5 Der dunkelgrau markierte Teil des Fische befindet sich im Wasser. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Teils des Fische. 6 BE

Der Aufgabentext wird auf der folgenden Seite fortgesetzt.

- 1.6 Das Logo des Geschäfts soll verändert werden. Für die obere Begrenzungslinie des Fisches wird weiterhin die Funktion v verwendet. Die untere Begrenzungslinie jedoch soll anstelle von u mithilfe einer anderen der in \mathbb{R} definierten Funktionen $u_k(x) = \frac{1}{8} k \cdot x^3$ mit $k > 0$ beschrieben werden. Der gemeinsame Punkt der Graphen von u_k und v , der die x -Koordinate $\frac{8}{k+2}$ hat, stellt die Kopfspitze dar.
- 1.6.1 Weisen Sie nach, dass die x -Achse für alle Werte von k Tangente an den Graphen von u_k in dessen Wendepunkt ist. 2 BE
- 1.6.2 Bestimmen Sie, wie der Wert von k gewählt werden müsste, damit die Ausdehnung der Schwanzflosse in y -Richtung $\frac{3}{2}$ beträgt. 3 BE
- 1.6.3 Beschreiben Sie den Einfluss des Parameters k auf die Lage der Kopfspitze. 2 BE
- 1.6.4 Untersuchen Sie für jede der folgenden Eigenschaften I, II und III, für welche Werte von k diese zutrifft. 7 BE
- I Die Kopfspitze ragt aus dem Wasser heraus.
 - II Die obere Begrenzungslinie des Fisches verläuft an der Kopfspitze parallel zur Wasseroberfläche.
 - III Die Kopfspitze ist der höchste Punkt des Fisches.

2 Analytische Geometrie

Die Abbildung zeigt ein Gebäude des Flughafens von Palma de Mallorca. Im eingezeichneten kartesischen Koordinatensystem kann die 140 Meter lange Dachkonstruktion modellhaft durch einen halben Zylinder und drei Prismen zusammengesetzt werden; die dreieckigen Grundflächen dieser Prismen sind kongruent.



Der Boden des Gebäudes sowie die Startbahnen des Flughafens liegen im Modell in der xy -Ebene. Die Seitenkanten der Prismen verlaufen parallel zur y -Achse. Die Punkte $A(7|0|4)$, $B(0|0|4)$ und $C(3,5|0|7,5)$ sind Eckpunkte eines der Prismen. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.

2.1 Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC gleichschenkelig und im Punkt C rechtwinklig ist. 3 BE

2.2 Bestimmen Sie das Volumen der gesamten Dachkonstruktion. 3 BE

Der Abbildung liegt ein Foto zugrunde. Die Position der Kamera, mit der dieses Foto aufgenommen wurde, wird durch den Punkt $K(30|20|1,5)$ dargestellt. Die weiße Dachfläche, die mit dem Schriftzug „Aeropuerto de Palma de Mallorca“ versehen ist, liegt im Modell in der Ebene E .

2.3 Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. 3 BE

(zur Kontrolle: $E : x + z = 11$)

2.4 Eine Sichtlinie verläuft von der Kamera geradlinig zum Mittelpunkt der weißen Dachfläche. Berechnen Sie die Größe des Winkels, den diese Sichtlinie mit der Dachfläche einschließt. 4 BE

Der Aufgabentext wird auf der folgenden Seite fortgesetzt.

Hinter dem Gebäude startet ein Flugzeug. Ab einer bestimmten Höhe über der Startbahn ist die Flugzeugspitze von der Position der Kamera aus oberhalb des Gebäudes sichtbar. Im Folgenden soll diese Höhe ermittelt werden.

- 2.5 Begründen Sie anhand einer geeignet beschrifteten Skizze, dass diejenigen Punkte der Dachkonstruktion, die am höchsten über dem Boden des Gebäudes liegen, für die Ermittlung der gesuchten Höhe keine Rolle spielen. 2 BE

- 2.6 Von der Position der Kamera aus wird die Flugzeugspitze unmittelbar oberhalb derjenigen Punkte der Dachkonstruktion sichtbar, die im Modell näherungsweise auf

der Gerade mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1,1 \\ 0 \\ 10,9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegen. Die Spitze des startenden

Flugzeugs bewegt sich im Modell entlang der Gerade mit der Gleichung

$\vec{x} = \begin{pmatrix} -60 \\ -990 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1000 \\ 0 \\ 350 \end{pmatrix}$. Ermitteln Sie die gesuchte Höhe.

3 Stochastik

In einem Land, in dem 80 % der Erwachsenen einen Führerschein besitzen, werden 200 Erwachsene zufällig ausgewählt. Es soll angenommen werden, dass dabei die Anzahl der ausgewählten Erwachsenen, die einen Führerschein besitzen, binomialverteilt ist.

3.1 Begründen Sie, dass die beschriebene Annahme gerechtfertigt ist. 2 BE

3.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der ausgewählten Erwachsenen, die einen Führerschein besitzen, vom Erwartungswert für diese Anzahl um höchstens 5 % abweicht. 4 BE

3.3 Ermitteln Sie, wie groß die Anzahl der ausgewählten Erwachsenen mindestens sein müsste, damit von diesen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mehr als 160 einen Führerschein besitzen. 4 BE

3.4 In einer bestimmten Region des betrachteten Lands werden alle Fahrprüfungen eines Jahres auf einen möglichen Zusammenhang zwischen dem Alter eines Prüflings und dem Bestehen der Prüfung hin untersucht. Von insgesamt 13879 Prüflingen waren 2482 zum Zeitpunkt der Prüfung mindestens 30 Jahre alt. Insgesamt haben 11104 Prüflinge die Prüfung bestanden; davon waren 8870 zum Zeitpunkt der Prüfung jünger als 30 Jahre.

Ein Prüfling wird zufällig ausgewählt. Betrachtet werden die folgenden Ereignisse:

A: „Der Prüfling war zum Zeitpunkt der Prüfung mindestens 30 Jahre alt.“

B: „Der Prüfling hat die Prüfung bestanden.“

3.4.1 Bestimmen Sie die Anzahl der Prüflinge, die zum Zeitpunkt der Prüfung jünger als 30 Jahre waren und die Prüfung nicht bestanden haben. 2 BE

3.4.2 Untersuchen Sie, ob die Wahrscheinlichkeiten $P_A(B)$ und $P(B)$ übereinstimmen. Geben Sie an, ob die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind, und interpretieren Sie Ihre Angabe im Sachzusammenhang. 5 BE

3.4.3 Besteht ein Prüfling die Prüfung bei der ersten Teilnahme nicht, nimmt er ein zweites Mal teil. Der Anteil der Prüflinge, die die Prüfung schon bei der ersten Teilnahme bestanden haben, ist q . Unter denjenigen, die zum zweiten Mal an der Prüfung teilnahmen, ist der Anteil der Prüflinge, die die Prüfung bestanden haben, nur halb so groß. Der Anteil der Prüflinge, die die Prüfung spätestens bei der zweiten Teilnahme bestanden haben, beträgt 90 %. Berechnen Sie den Wert von q . 3 BE